SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

Pod sistemom od dve linearne jednačine sa **dve nepoznate x** i **y** podrazumevamo:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

Ovo je takozvani **"prost" sistem** do koga uvek možemo doći ekvivalentnim transformacijama , koje su da vas podsetimo:

- Prvo se oslobodimo razlomaka (ako ih ima) tako što celu jednačinu pomnožimo sa NZS
- Onda se oslobodimo zagrada (ako ih ima) množeći „svaki sa svakim''.
- Nepoznate prebacimo na jednu a poznate na drugu stranu znaka jednakosti (=).
- Sredimo obe strane (saberemo i oduzmemo šta ima)

Ovde su $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ dati realni brojevi (ponekad mogu biti i parametri).

Rešenje sistema je uredjeni par brojeva (x_0, y_0) za koji važi da je:

$$\begin{aligned} a_1x_0 + b_1y_0 &= c_1 \\ a_2x_0 + b_2y_0 &= c_2 \end{aligned}$$

Sisteme možemo rešiti pomoću više metoda: zamena, suprotni koeficijenti, grafička metoda , itd.

Nama je najvažnije da tačno rešimo dati zadatak (problem) pa ćemo to i probati da vas naučimo.

Napomenimo samo da dati sistem može imati: jedinstveno rešenje, beskonačno mnogo rešenja ili pak da nema rešenja.

Najpre ćemo proučiti metodu **SUPROTNIH KOEFICIJENATA.**

Ideja je da množenjem jedne (ili obe) jednačine odgovarajućim brojem napravimo da ispred x ili y budu isti brojevi a suprotnog znaka. Onda te dve jednačine saberemo i oslobodili smo se od jedne nepoznate! Izračunamo drugu nepoznatu i vratimo se u bilo koju od jednačina iz prostog sistema.

Primeri:

1. Reši sistem jednačina:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 3x - 6y &= 7 \end{aligned}$$

Rešenje:

$$2x+3y=7\,/\cdot 2$$
$$3x-6y=7$$

Najlakše je da ispred x (ili y) napravimo da budu isti brojevi a suprotnog znaka, pa onda te dve jednačine saberemo. Zato ćemo prvu jednačinu pomnožiti sa 2.

$$+\begin{cases}4x\cancel{+6y}=14\\ 3x\cancel{-6y}=7\end{cases}$$
$$7x=21$$
$$x=\frac{21}{7}$$
$$x=3$$

Kad nadjemo jedno rešenje, vratimo se u jednu od jednačina iz prostog sistema (bilo koju) da nadjemo drugo rešenje.

$$2x+y=7$$
$$2\cdot 3+3y=7$$
$$6+3y=7$$
$$3y=7-6$$
$$3y=1$$
$$y=\frac{1}{3}$$

Ovde je rešenje jedinstveno: $(x,y)=\left(3,\frac{1}{3}\right)$

2. Reši sistem jednačina: 5x + y = -1
-10x –2y = 2

Rešenje:

$$5x+y=-1/2$$
$$-10x-2y=2$$

Pomnožimo prvu jednačinu sa 2

$$10x+2y=-2$$
$$-10x-2y=2$$
$$0=0$$

Ovde imamo situaciju da su se svi "skratili"!!!

To nam govori da sistem ima beskonačno mnogo rešenja. Da bi "opisali" ta rešenja iz jedne od jednačina izrazimo x (ili y), šta nam je lakše:

$$5x+y=-1$$
$$y=-1-5x$$

Sada su rešenja: $(x,y)=(x,-1-5x)$
$x\in R$

3. Reši sistem jednačina: 2x +3y = 4
-2x –3y = 5

Rešenje:

$$\begin{aligned} 2x+3y&=4 \\ -2x-3y&=5 \\ \hline 0&=9 \end{aligned}$$ **Saberemo ih odmah.**

U ovoj situaciji kažemo da je sistem nemoguć, odnosno nema rešenja!

4. Reši sistem jednačina: $\frac{5x-1}{6}+\frac{3y-1}{10}=3$

$$\frac{11-x}{6}+\frac{11+y}{4}=3$$

Rešenje:

$$\frac{5x-1}{6}+\frac{3y-1}{10}=3...../\cdot 30$$ **Odmah uočimo da ovaj sistem nije "prost'', pa**

$$\frac{11-x}{6}+\frac{11+y}{4}=3...../\cdot 12$$ **moramo najpre da "napravimo'' da bude.**

$$5(5x-1)+3(3y-1)=90$$
$$2(11-x)+3(11+y)=36$$

$$25x-5+9y-3=90$$
$$22-2x+33+3y=36$$

$$25x+9y=90+5+3$$
$$-2x+3y=36-22-33$$

$$25x+9y=98$$
$$-2x+3y=-19/\cdot(-3)$$ Napravili smo"prost''sistem. Drugu jednačinu množimo sa (-3).

$$\left.\begin{aligned} 25x+9y&=98 \\ 6x-9y&=57 \end{aligned}\right\}+$$

$$31x=155$$ Vratimo se sad u jednačinu od jednačina iz prostog sistema…
$$x=5$$

$$-2x+3y=-19$$
$$-10+3y=-19$$
$$-2\cdot 5+3y=-19$$
$$3y=-19+10$$
$$3y=-9$$
$$y=-3$$

dakle: $(x,y)=(5,-3)$

Primetili ste da rešenje (kada ga ima) moramo zapisati kao UREDJENI PAR , dakle (x_0, y_0).

Vodite računa o ovome!

Druga metoda koju ćemo proučiti je **METODA ZAMENE**.(Naravno, prvo moramo napraviti prost sistem)

Ovde je ideja da iz jedne od jednačina izrazimo x ili y i to zamenimo u drugu jednačinu!

Najbolje je da uočite nepoznatu ispred koje nema broj (odnosno da je 1) i da nju izrazite jer tako sebi olakšavate rešavanje.

Primeri:

1. **Reši sistem jednačina :**

$$4x-3y=8$$
$$x+2y=13$$

Rešenje:

Posmatrajmo dati sistem. Prvo primećujemo da je prost, pa odmah možemo krenuti na rešavanje.

U prvoj jednačini imamo brojeve ispred obe nepoznate, pa bi nam izražavanje odatle zakomplikovalo situaciju.

U drugoj jednačini ispred x nema broja! Dakle, **najbolje je izraziti x iz druge jednačine!**

$$4x-3y=8$$
$$\underline{x+2y=13} \to \boxed{x=13-2y}$$

$$x=13-2y$$
$$\underline{4(13-2y)-3y=8}$$

$$x=13-2y$$
$$\underline{52-8y-3y=8}$$

$$x=13-2y$$
$$\underline{-8y-3y=8-52}$$

$$x=13-2y$$
$$\underline{-11y=-44}$$

$$x=13-2y$$
$$\boxed{y=4}$$

Dobili smo vrednost za jednu nepoznatu. Vratimo se u $x = 13 - 2y$ da nadjemo x.

$$x = 13 - 2y$$
$$\boxed{y = 4}$$
$$x = 13 - 2 \cdot 4$$
$$y = 4$$
$$x = 5$$
$$y = 4$$

Dakle, rešenje sistema je $(x, y) = (5, 4)$

Treća metoda koju moramo proučiti je <u>GRAFIČKA METODA</u>.

Ovde moramo najpre svaku od jednačina izraziti u obliku $y = kx + n$ (pogledajte fajl linearna funkcija)

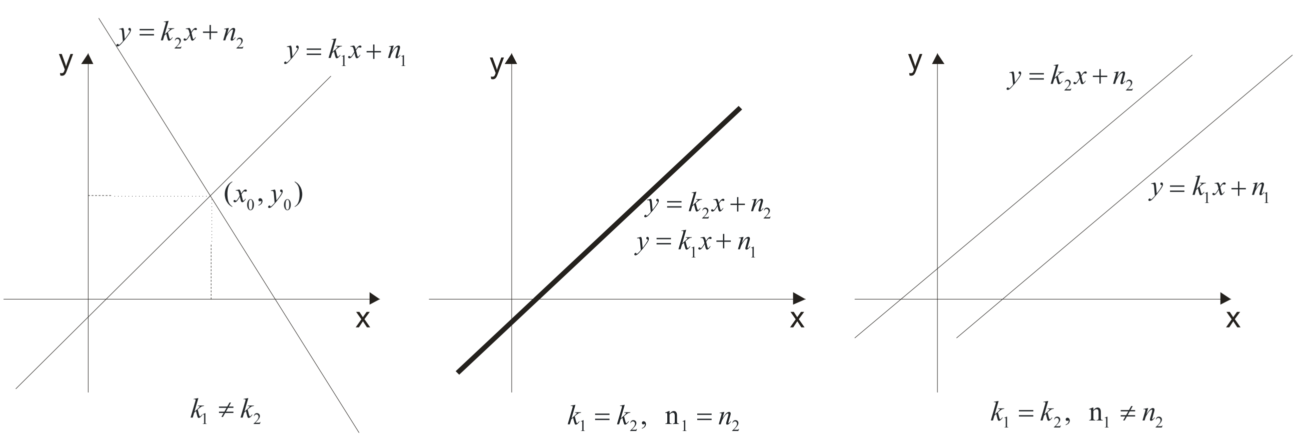
U istom koordinatnom sistemu nacrtamo obe funkcije iz datog sistema:

$$y = k_1 x + n_1$$
$$y = k_2 x + n_2$$

Kao što smo već govorili , mogu se desiti tri situacije:

- sistem ima jedinstveno rešenje (grafici se seku u jednoj tački, onda je $k_1 \neq k_2$)
- sistem ima beskonačno mnogo rešenja (grafici se poklapaju, pa je $k_1 = k_2$, $n_1 = n_2$)
- sistem je nemoguć, odnosno nema rešenja (grafici su paralelni , onda je $k_1 = k_2$, $n_1 \neq n_2$)

Ovim situacijama odgovaraju sledeći grafici:



jedinstveno rešenje   beskonačno mnogo rešenja   nema rešenja

Ako se desi zadatak da morate grafički da rešite sistem, naš savet je da prvo taj zadatak rešite analitički (računski) ili metodom zamene ili metodom suprotnih koeficijenata, pa tek onda da krenete sa grafičkim rešavanjem, jer će te onda moći malo i da korigujete sliku, jer već znate gde treba da je rešenje…

Primer

Grafički rešiti sistem jednačina:

$$x+y=2$$
$$2x+y=3$$

Rešenje:

Da prvo mi rešimo ovo analitički:

$$x+y=2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots * (-1)$$
$$\underline{2x+y=3}$$
$$-x\cancel{-y}=-2$$
$$\underline{2x\cancel{+y}=3}$$
$$x=1 \to 1+y=2 \to y=1$$
$$(x,y)=(1,1)$$

Sad možemo krenuti i sa grafičkim rešavanjem. Dakle, prvo izrazimo y iz obe jednačine.

$$x+y=2 \to \boxed{y=2-x}$$
$$\underline{2x+y=3} \to \boxed{y=3-2x}$$

Sad biramo po dve tačke , da nacrtamo grafike. Najbolje x=0, pa posle y=0.

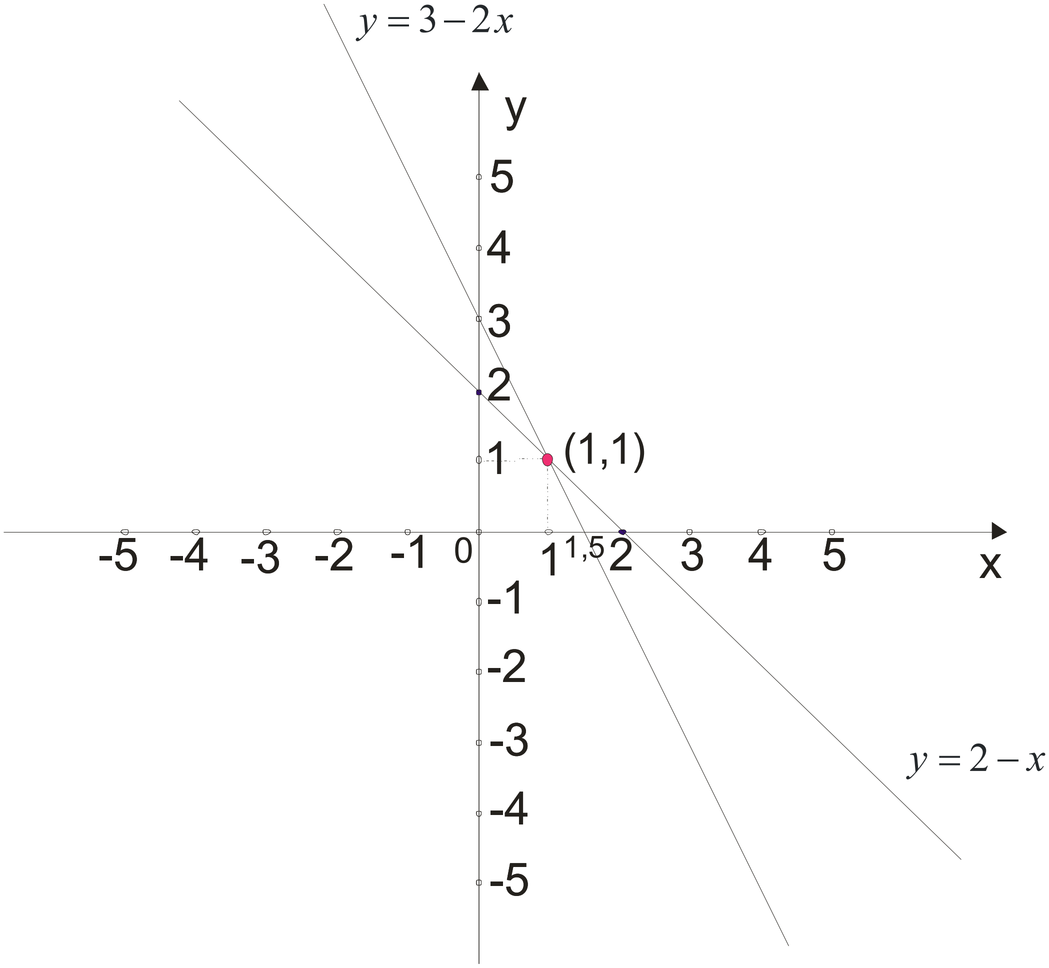
$y=2-x$

x	0	2
y	2	0

$y=3-2x$

x	0	3/2
y	3	0

Sad crtamo grafik, ali već znamo da presek mora biti u (1,1)



www.matematiranje.in.rs